704

~~674~~. Metric space ノ local property ニ就イテ

角谷　静夫（阪大）

Locally compact metric space R ガ與ヘラレタトキ、R ノ metric ヲツケカヘテ R ヲ uniformly locally compact ニスルコトハ出來ナイデアロウカ？

即チ R ガ metric space デソノ metric ガ $d(x, y)$ デ與ヘラレテヰルトセヨ。R ガ locally compact デアルト云フノハ任意ノ R ノ点 a ニ對シテ $\delta = \delta(a) > 0$ ガ定マッテ $\overline{S(a, \delta)}$ ガ compact ニナルト云フコトデアル。但シ $S(a, \delta)$ ハ $d(a, x) < \delta$ ナル

R ノ点 x 全体ノ集合デ $\overline{S(a,\delta)}$ ハソノ closure ヲ表ハス。コヽニ $\delta=\delta(a)$ ハ一般ニハ a ト共ニ変化スル量デ a ガ R ヲ動クトキノ $\delta(a)$ ノ下限ハ 0 デアルカモ知レナイ。

コヽデ問題ニシヨウトスルノハ R ノ metric $d(x,y)$ ヲソレト equivalent ナ $d^*(x,y)$ デオキカヘテ、コノ新シイ metric $d^*(x,y)$ ニ對シテ $\delta^*>0$ ヲ定メテ、$\overline{S^*(a,\delta^*)}$ ガ R ノスベテノ点 a ニ對シテ（同ジ δ^* デ！）compact ニナル様ニスルコトガ出來ルカト云フコトデアル。δ^* ガ a ニ無関係ト云フ所ガ問題ニナルノデアルカラ $\delta^*=1$ トシテモヨイ。

同様ナ問題ハ他ノ local property ニ對シテモオコル。例ヘバ local separability ニ関シテハ如何？ local connectedness ニ関シテハ如何？ local separability ニ関シテハ既ニ Alexandroff, Sierpinski ノ研究ニヨリ R ガ metric, locally separable デアレバ R ガ open 且ツ closed ナ separable ナ部分 R_α ノ和ニ分レルコトガワカッテヰルカラ x, y ガ同ジ R_α ニ属スルトキ $d^*(x,y)=\min(1,d(x,y))$, x, y ガ異ル R_α ニ属スルトキ $d^*(x,y)=1$ トオケバヨイ。(1)

---

(1) P. Alexandroff:
Math. Ann., 92(19)
W. Sierpinski: Sur les espaces métriques localement séparables,
Fund. Math., 21(1933)
角谷：
コノ結果ハ私ガ Sierpinski ノ論文ヲ知ラズニ出シタモノデアリマスガ、後デ Sierpinski ガ同ジ結果ヲ夙ニ出シテヰルノヲ知リマシタ。

次ニ R ガ locally connected デアルトキハ任意ノ $x, y \in R$ ニ對シテ $x, y \in E \subset R$ ナル connected set E ヲ考ヘテカヽルアラユル E ニ對スル $\delta(E)$ ノ下限ト 1 トノ小サイ方ヲ $d^*(x, y)$ トオケバヨイ。

但シ $\delta(E)$ ハ E ノ diameter デ $x, y \in E$ ナルトキノ $d(x, y)$ ノ上限トシテ定義サレル。又特ニ $x, y \in E \subset R$ ナル connected set E ガナイトキハ $d^*(x, y) = 1$ トオケバヨイ。先ヅ $d^*(x, y)$ ガ metric ノ三ツノ Axiom ヲ滿足スルコトハ殆ンド明カデアリ、コレガ $d(x, y)$ ト equivalent デアルコトハ R ガ locally compact デアルコトカラ容易ニ得ラレル。コノ $d^*(x, y)$ ニ對シテハ任意ノ $a \in R$ 及ビ $\delta^* \leqq 1$ ニ對シテ $S^*(a, \delta^*)$ シタガッテ $\overline{S^*(a, \delta^*)}$ ガ connected ニナル。實際 $x \in S^*(a, \delta^*)$ ナラバ $a, x \in E_x \subset R$, $\delta(E_x) < \delta^*$ ナル如キ connected set E_x ガ存在シ且ツ任意ノ $y \in E_x$ ハ $d^*(a, y) \leqq \delta(E_x) < \delta^*$ ナル故 $E_x \subset S^*(a, \delta^*)$. ヨッテ $S^*(a, \delta^*)$ ハカヽル E_x ノ和デアルカラ connected.

次ニ locally compact ノ場合ニコノ問題ガ可能デアルコトヲ證明スルノデアルガ同様ノ方法デモウ少シ一般ナコトガ證明出來ルノデコノタメニ定理ヲ一般ノ形デ述ベテオク。

<u>定理 1</u> P ヲ hereditary ナ性質トスルトキ、若シ metric space R ガ locally ニ性質 P ヲ滿足シテオレバ（卽チ任意ノ $a \in R$ ニ對シテ $\delta = \delta(a) > 0$ ガ定マリ

$S(a,\delta)$ガ性質Pヲモツナラバ) Rノ metric $d(x,y)$ヲコレト equivalent ナ $d^*(x,y)$ デオキカヘテ、此クシテ得ラレタ $d^*(x,y)$ ニ對シテ $S^*(a,1)$ ガ任意ノ $a\in R$ ニ對シテ性質Pヲモツテヰルヤウニスルコトガ出來ル。

コヽニ一ツノ性質Pガ hereditary デアルト云フノハ一ツノ集合Eガ性質PヲモツトキEノ任意ノ部分集合E_1ガ又性質Pヲモツコトヲ云フ。例へバEノ closure $\overline{E}$ (Rニ於ケル closure!) ガ compact デアルト云フ性質ハ hereditary デアル。又Eノ濃度ガアル cardinal number ヨリ小サイト云フコト。Eガ metric separable デアルト云フコト・等モ同樣ニ hereditary デアル。(2)

---

(2) Hausdorff ノ第二可附番公理ヲ滿足スルト云フ性質ハ hereditary デアルガ dense ナ可附番無限部分集合ヲ持ツト云フ性質ハ hereditary デハナイ!

實際 $|z|\leq 1$ ナルアラユル complex number ノ集合Eヲ考ヘ、$|z_0|<1$ ナル点ノ近傍ハ普通ノ如ク $|z-z_0|<\varepsilon$ デ定義シ、$|z_0|=1$ ナル点ノ近傍ハ $E_z(|z-z_0|<\varepsilon, |z|<1)+(z_0)$ ニヨッテ定義スレバ Eハ dense ナ可附番無限集合ヲモツガ、$|z|=1$ ナル点全体ヨリナルEノ部分集合E_1ハモハヤカヽル性質ヲモタナイ。

$E\subset H\subset R$ ナル connected set H ガ存在スルト云フEノ性質ハ hereditary デアルガコレニヨツテ local connectedness ヲ定義スルコトハ出來ナイ!

定理1ヲ証明スルタメニ先ヅRノ各点aニ對シテ$S(a,\delta)$ガ性質Pヲ持ツ如キ$\delta=\delta(a)$ノ上限$r(a)$ヲ考ヘル。$r(a)$ガ少クトモ一ツノ点aニテ∞トナレバ他ノ点ニテモ∞トナルノデアルカラ、コノトキハ$d^*(x,y)=d(x,y)$, $\delta^*=1$トオケバ$S^*(a,\delta^*)$ハ任意ノ$a\in R$ニ對シテ性質Pヲモツ。ヨツテRノ各点ニテ$r(a)<\infty$ト假定シテモ差支ナイ。

コノ$r(a)$ガaノ連続函数デシカモ

$$|r(a)-r(b)|\leqq d(a,b) \tag{1}$$

ヲ満足シテヰルコトハ殆ンド明カデアロウ。

此ノ如ク考ヘレバ定理1ヲ証明スルニハ次ノ定理2ヲ証明スレバ十分ナコトガワカル。

<u>定理2</u>　Metric space R（ソノ metric $d(x,y)$）ノ各点aニ對シテ$0<r(a)<\infty$ナル$r(a)$ガ定マリコレガ條件(1)ヲ満足シテ居レバ$d(x,y)$ト equivalent ナ metric $d^*(x,y)$ヲ適當ニトツテ任意ノ$a\in R$ニ對シテ

$$S^*(a,1)\subset S\left(a,\frac{r(a)}{2}\right)$$

トナル様ニスルコトガ出來ル。(3)

証明ハ二通リアル。何レモ方法トシテ興味ガアルカラニツトモ記スコトニスル。

---

(3)　$S(a,r(a))$ヲ考ヘズニ$S\left(a,\frac{r(a)}{2}\right)$ヲ考ヘタノハ$S(a,r(a))$ガ必ズシモ性質Pヲモタヌカラデアル。（$d<r(a)$ナラバ$S(a,d)$ハ性質Pヲモツ！）

第一法：　Rノ二点 a, b ガ $d(a,b)<r(a)$, $d(a,b)<r(b)$ ヲ満足スルトキ a, b ハ"十分近イ"ト呼ビ $a*b$ ニテコノ関係ヲ表ハス。[4] $a*a$ ナルコトハ明カ。

又 $a*b$ ナラバ $b*a$ デアル。シカシ $a*b$, $b*c$ デモ必ズシモ $a*c$ トハナラナイ。a ヲ定メタトキ $a*b$ ナル b 全体ノ集合 $U^*(a)$ ハ a ヲ内点トシテ含ム集合デアル。[5] 實際 $S(a, \frac{1}{2}r(a)) \subset U^*(a)$ ガ成立スル。何トナレバ $x \in S(a, \frac{1}{2}r(a))$ ナラバ $d(a,x) < \frac{1}{2}r(a) < r(a)$, 又(1)ヨリ $r(x) \geqq r(a) - d(a,x) > 2d(a,x) - d(a,x) = d(a,x)$ ヨッテ $a*x$, $x \in U^*(a)$.

次ニRノ二点 a, b ニ對シテ $a*a_1$, a_1*a_2, ……, a_n*b ナル如キ有限個ノ R ノ点 $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ ガ存在スルトキ a, b ハ"相繋ガル"ト呼ビ $a**b$ ニテコノ関係ヲ表ハス。$a*b$ ナラバ $a**b$ デアル。又 $a**b$ ナラバ $b**a$ デアリ、$a**b$, $b**c$ ナラバ $a**c$ デアル。a ヲ定メタトキ $a**b$ ナル b 全体ノ集合 $U^{**}(a)$ ハ a ヲ含ム open 且ツ closed ナ集合デアル。先ヅ $U^{**}(a)$ ガ open ナルコトハ $b \in U^{**}(a)$ ナラバ $S(b, \frac{1}{2}r(b)) \subset U^*(b) \subset U^{**}(a)$

---

(4)　コレハ W. Sierpinski ノ考ヘヲ用ヒタ。

W. Sierpinski: *Sur les espaces métriques localement séparables*, Fund. Math., 21 (1933)

(5)　實際ハ $U^*(a)$ 自身ガ開集合ニナルコトモ容易ニ證明出來ルノデアルガコレハ直接必要デハナイ。

ナルコトヨリ容易ニワカル。($U^*(b) \subset U^{**}(a)$ ナルコトハ $a**b$, $b*c$ ナラバ $a**c$ トナルコトヨリ明カ)。次ニ $U^{**}(a)$ ガ closed ナルコトヲ云フタメニハ R ガ互ニ共通点ノナイ open set $U^{**}(a)$ ノ和トナルコトヲ示セバヨイ。コノタメニハ任意ノ a, b ニ對シテ $U^{**}(a)=U^{**}(b)$ トナルカ又ハ $U^{**}(a) \cdot U^{**}(b)=0$ トナルコトヲ示セバヨイ。然ルニ実際 $c \in U^{**}(a) \cdot U^{**}(b)$ ナラバ $a**c$, $c**b$ トナリコレヨリ $a**b$, $U^{**}(a)=U^{**}(b)$ ヲ得ルカラコレハ明カデアル。

此ノ如ク R ハ互ニ共通点ノナイ open 且ツ closed ナ集合 U^{**} ノ和トナツタノデアルカラコノ各々ノ U^{**} ニ對シテ所要ノ條件ヲ満足スル metric $d^*(x, y)$ ガ定義サレレバヨイ。$d^*(x, y)$ ハ $\leqq 1$ ナル如ク取ルコトガ出來ルカラ(6) x, y ガ異ル U^{**} ニ屬スルトキ $d^*(x, y)=1$ トオケバヨイノデアル。

次ニ一ツノ U^{**} 内ニテ所要ノ條件ヲ満足スル $d^*(x, y)$ ヲ定義シヨウ。

任意ノ $x, y \in U^{**}$ ニ對シテ $x*a_1$, a_1*a_2, ..., a_n*y ナル如キ a_1, a_2, ..., a_n ガアルカラコノ a_1, a_2, ..., a_n ニ對シテ

$$d^*(x, y)=3\cdot \text{untere Grenze} \sum_{i=0}^{n} \frac{d(a_i, a_{i+1})}{\min(r(a_i), r(a_{i+1}))} \qquad (2)$$

---

(6) $d^*(x, y)>1$ ナラバ $d^*(x, y)=1$ トオキカヘル!

トオク。但シ $a_0=x,\ a_{n+1}=y$ トオイタ。又 Untere Grenze ハカヽルアラユル $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n\ (n=1,2,\cdots\cdots)$ ニ對スル下限ヲ取ルモノトスル。

此ノ如ク定義サレタ $d^*(x,y)$ ガ

$$d^*(x,y)=d^*(y,x)\geqq 0$$

$$d^*(x,y)+d^*(y,z)\geqq d^*(x,z)$$

ヲ滿足スルコトハ明カデアルカラ

$$x\neq y \longrightarrow d^*(x,y)>0 \tag{3}$$

$$d^*(x,y)<1 \longrightarrow d(x,y)<\frac{1}{2}r(x) \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} d^*(x,y_n)=0 \longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x,y_n)=0 \tag{5}$$

ヲ滿足シテヰルコトヲ證明スレバヨイ。コノタメニハ

$$d(x,y)<\frac{1}{2}r(x) \longrightarrow d^*(x,y)\leqq \frac{3\,d(x,y)}{r(x)-d(x,y)} \tag{6}$$

$$d^*(x,y)\geqq \min\left(1,\ \frac{2}{r(x)}d(x,y)\right) \tag{7}$$

ヲ證明スレバ十分デアル。何トナレバ

(3): $x\neq y \longrightarrow d(x,y)>0$, (7) ヨリ $d^*(x,y)>0$

(4): $d^*(x,y)<1$ ナラバ (7) ヨリ $\frac{2}{r(x)}d(x,y)<1$,

$$d(x,y)<\frac{1}{2}r(x)$$

(5): $\lim_{n\to\infty} d^*(x,y_n)=0$ ナラバ十分大キイ n ニ對シテ

$d^*(x,y_n)<1$

ヨツテカヽル n ニ對シテ (7) ヨリ $\frac{2}{r(x)}d(x,y_n)<d^*(x,y_n)$,

$$d(x,y_n)<\frac{r(x)}{2}\cdot d(x,y_n)\to 0$$

逆ニ $\lim_{n\to\infty} d(x, y_n) = 0$ ナラバ十分大キイ n ニ對シテ

$$d(x, y_n) < \frac{1}{2} r(x)$$

ヨッテカヽル n ニ對シテ (6) ヨリ

$$d^*(x, y_n) \leqq \frac{3\, d(x, y_n)}{r(x) - d(x, y_n)} \longrightarrow 0$$

(6) ノ證明： $d(x, y) < \frac{1}{2} r(x)$ ナル故 $x \neq y$。ヨッテ (2) ニ於テ $n=1$, $a_1 = y$ トオケバ

$$d^*(x, y) \leqq \frac{3\, d(x, y)}{\min(r(x), r(y))} \leqq \frac{3\, d(x, y)}{r(x) - d(x, y)}$$

(7) ノ證明： $d(x, a_i) < \frac{1}{2} r(x)$, $i = 1, 2, \cdots\cdots, n$ ナラバ

$$r(a_i) \leqq r(x) + d(x, a_i) < \frac{3}{2} r(x) \qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

ヨッテ

$$3 \sum_{i=0}^{n} \frac{d(a_i, a_{i+1})}{\min(r(a_i), r(a_{i+1}))} \geqq 3 \cdot \frac{2}{3\, r(x)} \sum_{i=0}^{n} d(a_i, a_{i+1})$$
$$\geqq \frac{2}{r(x)} d(x, y)$$

又 $d(x, a_i) \geqq \frac{1}{2} r(x)$ ナル a_i ガアレバソノ最初ノモノヲ a_{p+1} トオク。

$$(0 \leqq p \leqq n) \qquad r(a_i) \leqq r(x) + d(x, a_i) < \frac{3}{2} r(x) \qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots, p)$$

故ニ

$$3 \sum_{i=0}^{n} \frac{d(a_i, a_{i+1})}{\min(r(a_i), r(a_{i+1}))} \geqq 3 \sum_{i=0}^{p} \frac{d(a_i, a_{i+1})}{\min(r(a_i), r(a_{i+1}))}$$

$$\geqq 3 \cdot \frac{2}{3\, r(x)} \sum_{i=0}^{p} d(a_i, a_{i+1}) \geqq \frac{2}{r(x)} d(x, a_{p+1})$$

$$\geqq \frac{2}{r(x)} \cdot \frac{r(x)}{2} = 1$$

第二法： コレハ直接ニ $d^*(a, b)$ ヲ定義スル方法デアル。先ヅ $d(a, b) \leqq 1$, $r(a) \leqq 1$ ガ任意ノ $a, b \in R$ ニ対シテ成立スルト仮定シテモ一般性ヲ失ハナイ。(7) コノ $d(a,b)$, $r(a)$ ヲ用ヒテ

$$d^*(a, b) = 4 \cdot \sqrt{\frac{1}{r(a)^2} + \frac{1}{r(b)^2} - \frac{2\cos d(a, b)}{r(a)\, r(b)}} \tag{8}$$

トオク。コノ $d^*(a, b)$ ガ求ムル metric デアルコトヲ証明シヨウ。先ヅ $d^*(a, b)$ ガ距離ノ三ツノ axioms ヲ満足スルコトヲ示スニハ三角形ノ関係ガ成立スルコトダケヲ示セバヨイ。コレハ直接計算ニヨツテモ容易ニタシカメラレルガ次ノ様ニ考ヘルノモ面白イデアロウ。

a, b, c ヲ R ノ任意ノ三点トセヨ。Euclid ノ三次元空間 R^3 内ニ原点 O ヲ中心トスル半径 1 ノ球面 S ヲ考ヘル。球面 S 上ニ三点 A, B, C ヲ $\widehat{AB} = d(a, b)$, $\widehat{BC} = d(b, c)$, $\widehat{AC} = d(a, c)$ ガ成立スル様ニトル。コヽニ $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CA}$ ハ夫々 A, B; B, C; A, C ヲ通ル大円ノ劣弧ノ長サデアル。此ノ如キ三点ヲ取ルコトガ出来ルコトハ $d(a, b) + d(b, c) \geqq d(a, c)$ ニシテ且ツ $d(a, b)$, $d(b, c)$, $d(a, c) \leqq 1$ トナツテキルコトヨリ明カデアル。

---

(7) $d(a, b) > 1$, $r(a) > 1$ トナルトキニハ $d(a, b) = 1$, $r(a) = 1$ トオキカヘレバヨイ。

次ニ OA, OB, OC ヲ延長シテ、ソノ延長上ニ A^*, B^*, C^* ヲ夫々 $\overline{OA^*}=\dfrac{4}{r(a)}$, $\overline{OB^*}=\dfrac{4}{r(b)}$, $\overline{OC^*}=\dfrac{4}{r(c)}$ トナル様ニトル。$r(a)$, $r(b)$, $r(c)\leqq 1$ デアルカラ A^*, B^*, C^* ハ球外ノ点デアル。コノ A^*, B^*, C^* ニ對シテ

$$d^*(a,b)=\overline{A^*B^*},\quad d^*(b,c)=\overline{B^*C^*},\quad d^*(a,c)=\overline{A^*C^*}$$

トナルコトハ d^* ノ定義ヨリ明カデアル。ヨッテ三角形ノ関係

$$d^*(a,b)+d^*(b,c)\geqq d^*(a,c)$$

ガ成立スルコトハ明カデアル。

次ニ $d^*(a,b)$ ガ $d(a,b)$ ト equivalent ナ metric デアルコトハ $d^*(a,b)$ ノ定義 (8) カラ容易ニ計算ニヨッテ示スコトガ出來ルガ次ノ如ク考ヘルコトモ出來ル。上記ノ如ク O, A, B, A^*, B^* ヲトレバ

$$d^*(a,b)=\overline{A^*B^*}\geqq\overline{OA^*}\cdot\sin AOB$$

$$=\frac{4}{r(a)}\cdot\sin d(a,b)\geqq\frac{4}{r(a)}\cdot\frac{d(a,b)}{2}=\frac{2}{r(a)}\cdot d(a,b)\quad\cdots(9)$$

又、OB^* 上又ハソノ延長上ニ A' ヲ $\overline{OA'}=\overline{OA^*}$ ナル如クトレバ

$$d^*(a,b)=\overline{A^*B^*}\leqq\overline{A^*A'}+\overline{A'A^*}=4\cdot\frac{1}{r(a)}\cdot 2\sin\frac{d(a,b)}{2}$$

$$+4\left|\frac{1}{r(a)}-\frac{1}{r(b)}\right|\leqq\frac{4}{r(a)}d(a,b)+\frac{4d(a,b)}{r(a)\cdot r(b)}$$

$$\leqq\frac{4d(a,b)}{r(a)}\left\{1+\frac{1}{r(a)-d(a,b)}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots(10)$$

(9), (10) ヨリ $d^*(a, b)$ ト $d(a, b)$ トガ equivalent ナコトガワカル。又 (9) ヨリ $d^*(a, b) < 1$ ナラバ $d(a, b) < \frac{1}{2}r(a)$ ナルコトヲ得ルカラ定理ノ証明ハ完結スル。（証明終）

コレデ我々ノ問題ハ一先ヅ解決ガツイタノデアルガ次ニ local completeness ヲ問題トシヨウ。上記ノ定理ニヨレバ metric space R ガ locally complete デアレバ適當ニ metric ヲカヘレバ uniformly locally complete ニナルヤウニ思ハレルガ、completeness ヲ定義スル fundamental sequence ソノモノガ metric ニヨツテ定義サレテヰルノデアルカラ d^* ニ関スル fundamental sequence ハ d ニ関スル fundamental sequence ニナツテヰナイカモ知レナイト云フオソレガアル。ヨツテ問題ハ困難トナル。シカシ實際 d^* ニ関スル fundamental sequence ガ d ニ関スル fundamental sequence ニナツテヰルコトガ証明出來ルカラ R ハ d^* ニ関シテ uniformly complete ニナル。

次ニコレヲ証明シヨウ。$\{x_n\}$ ガ d^* ニ関スル fundamental sequence デアレバ適當ニ n_0 ヲトレバ $d^*(x_{n_0}, x_n) < 1$ ガ $n \geqq n_0$ ニ對シテ成立スル。ヨツテ (7) 又ハ (9) ヨリ

$$d(x_{n_0}, x_n) \leqq \frac{r(x_{n_0})}{2} d^*(x_{n_0}, x_n) < \frac{1}{2} r(x_{n_0})$$

トナル。故ニ再ビ (7) 又ハ (a) ニヨリ $m, n \geqq n_0$ ニ對シテ

$$d(x_m, x_n) \leqq \frac{r(x_n)}{2} d^*(x_m, x_n)$$

$$\leqq \frac{r(x_{n_0}) + d(x_{n_0}, x_n)}{2} d^*(x_m, x_n)$$

$$< \frac{3}{4} \cdot r(x_{n_0}) \cdot d^*(x_m, x_n)$$

ガ成立スル。ヨッテ $\{x_n\}$ ハ d ニ関シテ fundamental sequence トナリ R ガ d ニ関シテ locally complete (ソノ半径ノ上限 $r(x)$！) ナルコトニヨリ、アル $x_0 \in R$ ガ存在シテ $d(x_n, x_0) \to 0$. ヨッテ又 $d^*(x_n, x_0) \to 0$. 故ニ R ハ d^* ニ関シテ Uniformly locally complete デアル。

コヽデ注意シタイコトハ R ガアル metric d^* ニ関シテ uniformly locally complete デアレバ R ガ d^* ニ関シテ complete ニナルコトデアル。(コノコトハ殆ンド説明スルマデモナイ)。ヨッテ結局、metric space R ガ locally complete デアレバ R ノ metric ヲ適当ニツケカヘレバ R ガ complete ニナルコトガワカッタ。

最後ニ locally compact metric space R ガ与ヘラレタトキ、R ノ metric d ヲソレト equivalent ナ d^* デオキカヘテ R ノ任意ノ点 a 及ビ任意ノ正数 M ニ対シテ $\overline{S^*(a, M)}$ ガ compact ニナル様ニスルコトガ出来ナイカ、ト云フコトヲ考ヘル。

コレガ可能デアルタメニハ R ハ separable デナケレバ

ナラナイ。シカモ逆ニ R ガ separable ナラバコレハ常ニ可能デアル。コレヲ証明スルニハ次ノ Alexandroff-Urysohn ノ定理[8] ヲ用フレバヨイ。

定理: locally compact, separable ナ Hausdorff 空間ハコレニ一点ヲツケ足シテ compact ニスルコトガ出來ル。

R ニ一点 ∞ ヲツケ足シテ compact, separable ナ空間 R^* ヲ作ッタトセヨ。R^* ハ metrisable デアル。コノ metric ヲ d トスレバ R ノ任意ノ二点 a, b ニ對シテ $d^*(a, b)$ ハ

$$d^*(a, b) = d(a, b) + \left| \frac{1}{d(a,\infty)} - \frac{1}{d(b,\infty)} \right|$$

ニヨッテ定義サレル。コレガ所要ノ性質ヲモツコトハ容易ニタシカメルコトガ出來ル。

同様ナコトハ hereditary デ且ツ finite additive ナ性質 P ニ對シテモ成立スル。但シ性質 P ガ finite additive デアルト云フノハ $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_n$ ガ各々性質 P ヲモテバ $E_1 + E_2 + \cdots\cdots + E_n$ モ亦ノ性質 P ヲモツコトヲ云フ。

<u>定理3</u> P ヲ hereditary 且ツ finite additive ナ性質トスルトキ若シ metric space R ガ separable

---

(8) P. Alexandroff et P. Urysohn: Memoire sur les espaces compactes, Verh. Vet. Amsterdam (1929)

デ且ツ locally ニ性質Pヲ満足シテ居レバ R ノ metric d ヲコレト equivalent ナ d^* デオキカヘテ、此クシテ得ラレタ d^* ニ對シテ $S^*(a, M)$ ガ任意ノ $a \in R$ 及ビ任意ノ正數 M ニ對シテ性質Pヲモツテヰルヤウニスルコトが出來ル。

證明: R ノ各点 a ニ對シテ $r(a)$ ヲ定理1ノ場合ト同様ニ定義スル。$r(a)$ が少クトモ一ツノ点 a ニテ ∞ トナルトキハ定理ハ明カデアルカラ R ノ各点ニテ $r(a) < \infty$ ト假定スル。定理3ヲ證明スルニハ次ノ定理4ヲ證明スレバ十分デアル。

<u>定理4</u> separable metric space R (ソノ metric $d(x, y)$) ノ各点 a ニ對シテ $r(a) > 0$ が定義サレタトキハ R ノ metric $d(x, y)$ ヲソレト equivalent ナ $d^*(x, y)$ デオキカヘテ、任意ノ $a \in R$ 及ビ任意ノ正數 M ニ對レテ $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n \in R$ が定マツテ

$$S^*(a, M) \subset \sum_{i=1}^{n} S(a_i, \alpha_i r(a_i)), \quad 0 < \alpha_i < 1 \tag{11}$$

トナル様ニスルコトが出來ル。但シ S, S^* ハ夫々 metric d, d^* ニ關スル sphere ヲ表ハス。

證明: R ノ各点 a ニ對シテ $S(a, \frac{1}{2} r(a))$ ヲ考ヘル。R ハ separable デアルカラ $a_n (n = 1, 2, \cdots\cdots)$ ヲ適當ニトレバ

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} S(a_n \tfrac{1}{2} r(a_n))$$

トナル。今

$$D_n=\sum_{i=1}^{n} S\left(a_i,\left(1-\frac{1}{2^i}\right)r(a_i)\right) \qquad n=1,2,\cdots\cdots$$

ヲ考ヘレバ $\overline{D_n}\subset D_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ニテ且ツ $R=\sum_{n=1}^{\infty}D_n$ デアル。

ヨツテ $x\in D_1$ ナルトキ $f(x)=1$, $x\in D_n-\overline{D_{n-1}}$ ナルトキ $n-1\leqq f(x)\leqq n$ ナル如キ R デ定義サレタ連續函數 $f(x)$ ガ存在スル。今 $f_n(x)=\max(n,f(x))$ トオキ

$$d^*(x,y)=d(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\left|f_n(x)-f_n(y)\right| \cdots\cdots\cdots (12)$$

トオケバコレガ求ムル d^* デアル。

先ヅ(12)ノ右辺ノ無限級数ガ x,y ヲ定メレバ有限デ切レルコトヲ注意シヨウ。ソレハ x,y ヲ定メルト十分大キイ n ニ對シテ $x,y\in D_n$ トナリ、$f_n(x)\equiv n$, $x\in D_n$ デアルカラ $f_n(x)=f_n(y)$ トナルカラデアル。$d^*(x,y)$ ガ metric ノ三ツノ axiom ヲ満足スルコト及ビ $d(x,y)$ ト equivalent ナ metric デアルコトハ殆ンド明カデアル。

次ニ(11)ガ成立スルコトヲ証明シヨウ。a ヲ R ノ任意ノ点トスレバ $R=\sum_{n=1}^{\infty}D_n$ ナルコトヨリ $a\in D_{n_0}$ ナル n_0 ガ定マル。ヨツテ $x\in S^*(a,M)$ トスレバ $d^*(a,x)<M$ デアルカラ(12)ヨリ

$$\left|f_{n_0}(a)-f_{n_0}(x)\right|\leqq d^*(a,x)<M$$

$a \in D_{n_0}$ デアルカラ $f_{n_0}(a) = n_0$.

ヨッテ

$$f_{n_0}(x) < n_0 + M$$

故ニ

$$x \in D_{n_0+M} = \sum_{i=1}^{n_0+M} S_i\left(a_i, \left(1-\frac{1}{2^i}\right) r(a_i)\right)$$

ヨッテ $\alpha_i = 1 - \frac{1}{2^i}$ トオケバ (11) ガ成立スル。 (証明終)